Kapitel 6

Gleichungssysteme

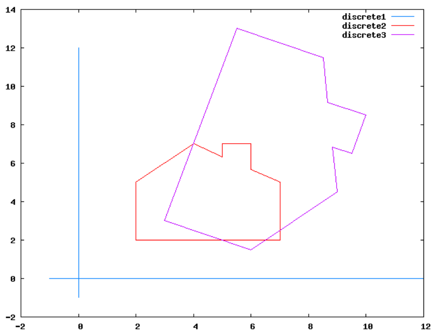
Bisher haben wir nur für spezielle Fälle (Drehungen, Spiegelungen) die zu einer bekannten Abbildung gehörende Matrix gesucht. Da uns die Abbildung in allen Einzelheiten bekannt war, konnten wir die Bilder der drei Einheitspunkte ermitteln und damit die Matrix der Abbildung finden.

6.1 Welche Matrix gehört zu der Abbildung ?

Das - ja schon oft verwendete - Haus wurde abgebildet - die Abbildungsmatrix ist aber noch unbekannt.

Wir kennen aber die Koordinaten der Original- und der Bildpunkte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \\ 6 & 4 \\ \frac{11}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 5 & \frac{11}{2} \\ 5 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 11 \\ 7 & 10 \\ \frac{29}{4} & \frac{35}{4} \\ \frac{33}{4} & \frac{33}{4} \\ 8 & \frac{29}{4} \\ \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \\ 8 & 5 \\ 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$



Die Abbildungsmatrix hat die Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Bisher brauchten wir die Bilder der zwei
Einheitspunkte, um die Abbildungsmatrix zu bestimmen. Wir betrachten einmal nur die beiden ersten Punkte und erhalten:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 11 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.3}$$

6.1.1 Ein Gleichungssystem

Damit ergeben sich folgende vier Gleichungen, die sich aber zu zwei Systemen mit je zwei linearen Gleichungen zusammenfassen lassen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2a_{11} & + & 2a_{21} & = & 3 & 2a_{12} & + & 2a_{22} & = & 3 \\ 6a_{11} & + & 2a_{21} & = & 5 & 6a_{12} & + & 2a_{22} & = & 11 \end{array} \tag{6.4}$$

Ich betrachte zuerst nur das linke System:

$$\begin{array}{ccccccc} 2a_{11} & + & 2a_{21} & = & 3 & \| & \\ 6a_{11} & + & 2a_{21} & = & 5 & \| & \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ 1a_{11} & + & 1a_{21} & = & \frac{3}{2} & \| & \mathrm{I}:2 \\ 6a_{11} & + & 2a_{21} & = & 5 & \| & \mathrm{II} \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ 1a_{11} & + & 1a_{21} & = & \frac{3}{2} & \| & \mathrm{I} \\ 0a_{11} & + & -4a_{21} & = & -4 & \| & \mathrm{II}-6*\mathrm{I} \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ 1a_{11} & + & 1a_{21} & = & \frac{3}{2} & \| & \mathrm{I} \\ 0a_{11} & + & 1a_{21} & = & 1 & \| & \mathrm{II}:(-4) \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ 1a_{11} & + & 0a_{21} & = & \frac{1}{2} & \| & \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ 0a_{11} & + & 1a_{21} & = & 1 & \| & \mathrm{II} \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \end{array} \tag{6.5}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung erhält man aus dem rechten System:

$$\begin{array}{rcrcr} 2a_{12} & + & 2a_{22} & = & 3 \\ 6a_{12} & + & 2a_{22} & = & 11 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{12} & & & = & 2 \\ & & a_{22} & = & -\frac{1}{2} \end{array} \tag{6.6}$$

und damit die Abbildungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Das obige Verfahren kennst du sicher noch aus Klasse 8. Dabei hättest du aber wahrscheinlich gleich das Subtraktionsverfahren angewandt, a_{11} berechnet ,eingesetzt und dann weiter gerechnet Wenn wir mehr als zwei Variable haben, wird es aber schnell unübersichtlich und fehleranfällig. Eine Möglichkeit diese Probleme zu vermeiden, ist es, weniger aufzuschreiben. Ich zeige die obige Rechnung noch einmal:

$$\begin{array}{cccc r} a_{11} & a_{12} & \| & & \\ -- & -- & - & -- & \\ 2 & 2 & \| & 3 & \\ 6 & 2 & \| & 5 & \\ -- & -- & - & -- & \\ 1 & 1 & \| & \frac{3}{2} & \mathrm{I}:2 \\ 6 & 2 & \| & 5 & \mathrm{II} \\ -- & -- & - & -- & \\ 1 & 1 & \| & \frac{3}{2} & \mathrm{I} \\ 0 & -4 & \| & -4 & \mathrm{II}-6*\mathrm{I} \\ -- & -- & - & -- & \\ 1 & 1 & \| & \frac{3}{2} & \mathrm{I} \\ 0 & 1 & \| & 1 & \mathrm{II}:(-4) \\ -- & -- & - & -- & \\ 1 & 0 & \| & \frac{1}{2} & \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ 0 & 1 & \| & 1 & \mathrm{II} \\ -- & -- & - & -- & \end{array} \tag{6.8}$$

6.2 Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssysteme wie das obige nennen wir Lineare Gleichungssysteme.

Definition :

Unter einer linearen Gleichung verstehen wir eine Gleichung, die durch Äquivalenz-Umformungen in die Form

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = r \ (mit\, a_1, a_2, a_3, ...a_n, r \in \mathrm{R})$

gebracht werden kann.

Unter einem linearen Gleichungssystem verstehen wir eine Aussageform, in der m lineare Gleichungen mit n Variablen konjunktiv miteinander verknüpft sind.

Bemerkungen :

1.Anschaulicher : in einer linearen Gleichung dürfen - nach der Zusammenfassung - keine Potenzen der Variablen auftreten.

2.Ein lineares Gleichungssystem (kurz LGS) ist nur gelöst, wenn alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden.

Um das obige Verfahren stärker zu verdeutlichen, zeige ich es noch einmal an einem System mit drei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 & \| \\ & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 & \| \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 & \| \\ --- & - & --- & - & --- & - & --- & -- \end{array} \tag{6.9}$$

Ich wechsle die Darstellungsform:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & x_2 & x_3 & \| & \\ -- & -- & -- & - & -- \\ 2 & -3 & 1 & \| & -1 \\ 0 & 3 & 4 & \| & 2 \\ -1 & 2 & -1 & \| & 2 \\ -- & -- & -- & - & -- \end{array} \tag{6.10}$$

Um ein LGS zu lösen, sind folgende Schritte möglich - und meist auch nötig:

1. Vertauschen einzelner Gleichungen (Zeilen)

2. Multiplikation einer Gleichung (Zeile) mit einer von Null verschiedenen Zahl

3. Addition / Subtraktion von zwei Gleichungen (Zeilen)

und - sollte aber möglichst vermieden werden, da hierdurch leicht Fehler entstehen können. Dieser Schritt muss am Schluss wieder rückgängig gemacht werden!

4. Vertauschen von zwei Variablen (d.i. Spalten)
Im folgenden wird das obige System als Beispiel durch gerechnet:

$$\begin{array}{rrrcrr}
x_1 & x_2 & x_3 & \| & & \\
-- & -- & -- & - & -- & (Schritt_1) \\
1 & -2 & 1 & \| & -2 & -\mathrm{III}(Zeilen\,vertauscht) \\
2 & -3 & 1 & \| & -1 & \mathrm{I} \\
0 & 3 & 4 & \| & 2 & \mathrm{II} \\
-- & -- & -- & - & -- & (Schritt_2) \\
1 & -2 & 1 & \| & -2 & \\
0 & 1 & -1 & \| & 3 & \mathrm{II}-2*\mathrm{I} \\
0 & 3 & 4 & \| & 2 & \mathrm{II} \\
-- & -- & -- & - & -- & (Schritt_3) \\
1 & -2 & 1 & \| & -2 & \\
0 & 1 & -1 & \| & 3 & \\
0 & 0 & 7 & \| & -7 & \mathrm{III}-3*1\mathrm{II} \\
-- & -- & -- & - & -- & (Schritt_4) \\
1 & -2 & 1 & \| & -2 & \\
0 & 1 & -1 & \| & 3 & \\
0 & 0 & 1 & \| & -1 & \mathrm{III}:7 \\
-- & -- & -- & - & -- &
\end{array} \tag{6.11}$$

An dieser Stelle ist ein wichtiger Zwischenschritt erreicht:
In der Hauptdiagonalen stehen nur Einsen und unterhalb nur Nullen.
Anmerkung: die Diagonale, die oben links beginnt nennt man Hauptdiagonale

Das gegebene 3x3-Gleichungssystem (drei Gleichungen mit drei Variablen) wurde zuerst auf die Dreiecksform gebracht, d.h. in der Diagonalen stehen nur Einsen und unterhalb nur Nullen.

(Schritt 1) Durch Vertauschen der Gleichungen wurde das erste Element der ersten Zeile zu 1 gemacht. Hätte dies nicht gepasst, hätten wir die alle Zahlen der ersten Zeile durch ihr erstes Element dividieren müssen.

(Schritt2) Dann konnten durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Gleichung die Koeffizienten von x_1 in der zweiten zu Null gemacht werden. In der dritten Gleichung ist dies in diesem Beispiel überflüssig; es würde sonst entsprechend verfahren. Bei anderen Koeffizienten müssten wir durch Zeilentausch oder Division dafür sorgen, dass der zweite Koeffizient zu 1 wird.

(Schritt 3 / 4) Entsprechend wird dies für x_2 in der dritten Zeile erreicht.

Damit haben wir die Koeffizientenmatrix auf die Dreiecksform gebracht.

Ab (Schritt 5) ließe sich der Rest auch ganz gut „zu Fuß “erledigen : aus der dritten Zeile folgt x_3 = -1 ; dies wird in die zweite Zeile eingesetzt, es bleibt nur noch x_2 als Unbekannte übrig und lässt sich einfach berechnen, nach Einsetzen dieser beiden erhält man aus der ersten Gleichung den Wert der letzten Unbekannten x_1.

Dieses Vorgehen ist bei 3x3-Gleichungssystemen oft schneller als das vorgestellte. Bei Systemen mit mehr Unbekannten - insbesondere wenn die Anzahl der Gleichungen und der Variablen verschieden sind - ist das folgende Verfahren aber fast immer besser:

In (Schritt 5 und 6) werden auf die gleiche Art die Koeffizienten zuerst von x_3 und dann x_2 über der Hauptdiagonalen zu Null gemacht. Dann kann man ganz einfach die Lösung ablesen.

$$\begin{array}{rrrcrr} x_1 & x_2 & x_3 & \| & & \\ -- & -- & -- & - & -- & (Schritt_5) \\ 1 & -2 & 0 & \| & -1 & \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ 0 & 1 & 0 & \| & 2 & \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ 0 & 0 & 1 & \| & -1 & \\ -- & -- & -- & - & -- & (Schritt_6) \\ 1 & 0 & 0 & \| & 3 & \mathrm{I}+2*\mathrm{II} \\ 0 & 1 & 0 & \| & 2 & \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ 0 & 0 & 1 & \| & -1 & \end{array} \tag{6.12}$$

6.3 Die Suche nach einer beliebigen 2D-Matrix

Der Punkt $\mathrm{P}(x_1|y_1)$ habe das Bild $\mathrm{Q}(u_1|v_1)$, der Punkt $\mathrm{P}(x_2|y_2)$ habe das Bild $\mathrm{Q}(u_2|v_2)$. Zur Abbildung gehöre die Matrix $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Also ist:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \mathrm{X}_2 & y_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.13}$$

d.h.;

$$x_1 a_{11} + y_1 a_{21} = u_1 \qquad \wedge\ x_1 a_{12} + y_1 a_{22} = v_1 \tag{6.14}$$

$$\wedge\ x_2 a_{11} + y_2 a_{21} = u_2 \qquad \wedge\ x_2 a_{12} + y_2 a_{22} = v_2 \tag{6.15}$$

Auch hier können wir a_{11} und a_{21} aus den beiden linken, a_{12} und a_{22} aus den beiden rechten Gleichungen ermitteln.

$$x_1 a_{11} + y_1 a_{21} = u_1 \tag{6.16}$$
$$x_2 a_{11} + y_2 a_{21} = u_2 \tag{6.17}$$

$$a_{21} = \frac{u_2 - x_2 a_{11}}{y_2} \tag{6.18}$$
$$x_1 a_{11} + y_1 \frac{u_2 - x_2 a_{11}}{y_2} = u_1 \tag{6.19}$$

$$a_{21} = \frac{u_2 - x_2 a_{11}}{y_2} \tag{6.20}$$
$$x_1 y_2 a_{11} + y_1 u_2 - x_2 y_1 a_{11} = u_1 y_2 \tag{6.21}$$

$$a_{21} = \frac{u_2 - x_2 a_{11}}{y_2} \tag{6.22}$$
$$a_{11}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) = u_1 y_2 - u_2 y_1 \tag{6.23}$$

$$a_{21} = \frac{u_2 - x_2 a_{11}}{y_2} \tag{6.24}$$
$$a_{11} = \frac{u_1 y_2 - u_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.25}$$

$$a_{21} = \frac{u_2}{y_2} - \frac{x_2}{y_2} \cdot \frac{u_1 y_2 - u_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.26}$$
$$a_{11} = \frac{u_1 y_2 - u_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.27}$$

$$a_{21} = \frac{u_2 x_1 y_2 - u_2 x_2 y_1 - u_1 x_2 y_2 + u_2 x_2 y_1}{y_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)} \tag{6.28}$$
$$a_{11} = \frac{u_1 y_2 - u_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.29}$$

$$a_{21} = \frac{u_2 x_1 y_2 - u_1 x_2 y_2}{y_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)} \tag{6.30}$$
$$a_{11} = \frac{u_1 y_2 - u_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.31}$$

$$a_{21} = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.32}$$
$$a_{11} = \frac{u_1 y_2 - u_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.33}$$

Das rechte Gleichungssystem behandelt man entsprechend, und erhält damit:

$$a_{11} = \frac{u_1 y_2 - u_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \quad a_{12} = \frac{v_1 y_2 - v_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.34}$$

$$a_{21} = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \quad a_{22} = \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \tag{6.35}$$

Einschub: Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

Wir erkennen die gleichartige Struktur der Zähler und Nenner. Eine ähnliche - allerdings etwas kompliziertere Struktur erhält man bei der Lösung von n Gleichungen mit n Unbekannten. Mathematiker schreiben dies kürzer als ***Determinante***.

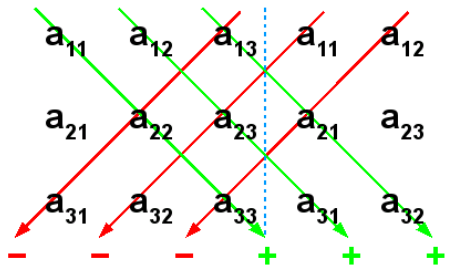
$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{6.36}$$

bzw.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} \tag{6.37}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{6.38}$$

Regel von Sarrus - eine Eselsbrücke für 3x3-Determinanten (und **nur** für diese!):
Man schreibt die ersten beiden Spalten dahinter:



Die „Schrägen“ nach rechts unten (grün) sind positiv, die nach links unten (rot) negativ zu nehmen.
Allgemein werden Determinanten nach folgendem Schema entwickelt (Laplacescher Entwicklungssatz) :

$$|A| = \sum_{z=1}^{n} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot |A_{zs}| \tag{6.39}$$

Das sieht schlimmer aus als es ist:

z steht für die Zeilennummer, s für die Spaltennummer in der Matrix. $\sum_{z=1}^{n}$ bedeutet die Summe der nachfolgenden Terme, wobei z nacheinander die Werte von $z = 1$ bis $z = n$ annimmt. $(-1)^{z+s}$ bewirkt, dass sich die Vorzeichen abwechseln. a_{zs} ist das Element der Matrix aus Zeile z, Spalte s. Zu letzt ist A_{zs} die Matrix, die man aus der ursprünglichen Matrix A erhält, indem man die Zeile z und die Spalte s weglässt. Wichtig ist hier, dass die Matrix A_{zs} eine um eins kleinere Dimension hat.

Wenn man die obige 3x3-Matrix nach der ersten Spalte (also $s = 1$) entwickelt, erhält man dann:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{6.40}$$

$$= \sum_{z=1}^{n} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot |A_{zs}| \tag{6.41}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot |A_{11}| + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot |A_{21}| + (-1)^{3+1} \cdot a_{31} \cdot |A_{31}| \tag{6.42}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{6.43}$$

hier gab es mal eine Fassung mit falschem Vorzeichen vor a_{21}! So ist es richtig

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - 3 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2)$

$= 0 - 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = 6 - 3$

$= 3$

Das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1 \tag{6.44}$$
$$\wedge \quad a_{21}x + a_{22}y = c_2 \tag{6.45}$$

hat dann (in der Determinantenschreibweise) die Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{12} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{6.46}$$

Ähnlich folgt für das Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Variablen:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \tag{6.47}$$
$$\wedge \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \tag{6.48}$$
$$\wedge \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \tag{6.49}$$
$$\tag{6.50}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{6.51}$$

Grundlage ist also jeweils die Koeffizientenmatrix der linken Seite. Im Zähler wird jeweils die zur gesuchten Variable durch die rechte Seite ersetzt.

Fortsetzung

Mit dieser Schreibweise erhalten wir statt der Darstellung in (6.34 f) für das Gleichungssystem aus (6.14 f):

$$x_1 a_{11} + y_1 a_{21} = u_1 \qquad \wedge \; x_1 a_{12} + y_1 a_{22} = v_1 \tag{6.52}$$
$$\wedge \; x_2 a_{11} + y_2 a_{21} = u_2 \qquad \wedge \; x_2 a_{12} + y_2 a_{22} = v_2 \tag{6.53}$$

$$a_{11} = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \qquad a_{12} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & y_1 \\ v_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \tag{6.54}$$

$$a_{21} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \qquad a_{22} = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \tag{6.55}$$

6.3.1 Welche Matrix gehört zu der Abbildung ? - Bearbeitet mit wxMaxima

Du kannst Dir sicher vorstellen, dass das oben dargestellte Entwickeln von Determinanten „zu Fuß“ recht fehleranfällig ist. Auch die meisten Taschenrechner helfen hier wenig; der Fehler liegt meist daran, dass falsch Zahlen benutzt werden, Produkte vergessen werden o.ä., nicht daran, dass falsch multipliziert wird.

Wir betrachten noch einmal das obigen Beispiel (6.9):

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 & \| \\
 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 & \| \\
-x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 & \| \\
--- & - & --- & - & --- & - & --- & --
\end{array} \tag{6.56}$$

zu berechnen sind die vier folgenden Determinanten:

$$|\mathrm{M}_n| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}; |\mathrm{M}_1| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}; |\mathrm{M}_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}; |\mathrm{M}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \tag{6.57}$$

In wxMaxima sieht das so aus:

```
(%i1) Mn: matrix([2,-3,1],[0,3,4],[-1,2,-1]);
(%i2) M1: matrix([-1,-3,1],[2,3,4],[2,2,-1]);
(%i3) M2: matrix([2,-1,1],[0,2,4],[-1,2,-1]);
(%i4) M3: matrix([2,-3,-1],[0,3,2],[-1,2,2]);
(%i5) x1: determinant(M1)/determinant(Mn);
(%i6) x2: determinant(M2)/determinant(Mn);
(%i7) x3: determinant(M3)/determinant(Mn);
```

(%i1) Mn:matrix([2,-3,1],[0,3,4],[-1,2,-1]);

(%o1) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

(%i2) M1:matrix([-1,-3,1],[2,3,4],[2,2,-1]);

(%o2) $$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

(%i3) M2:matrix([2,-1,1],[0,2,4],[-1,2,-1]);

(%o3) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

(%i4) M3:matrix([2,-3,-1],[0,3,2],[-1,2,2]);

(%o4) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix};$$

(%i5) x1:determinant(M1)/determinant(Mn);
(%o5) 3
(%i6) x2:determinant(M2)/determinant(Mn);
(%o6) 2
(%i7) x3:determinant(M3)/determinant(Mn);
(%o7) -1

und wir bekommen auch hier die Lösungen $x_1 = -2$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$

6.3.2 wxMaxima - linsolve

Eine andere Möglichkeit, eine System linearer Gleichungen mit wxMaxima zu lösen ist der Einsatz der Funktion

```
linsolve([expr_1,...,expr_m],[x_1,...,x_n]);
```

Im obigen Beispiel (6.9) sieht das so aus:

```
expr_1:2*x_1-3*x_2+x_3=-1;
expr_2:3*x_2+4*x_3=2;
expr_3:-x_1+2*x_2-x_3=2;
linsolve([expr_1,expr_2,expr_3],[x_1,x_2,x_3]);
```

6.4 überbestimmte Gleichungssysteme

Das sehr einfache Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array} \tag{6.58}$$

hat die Lösungen : x=1; y=2.
Dies liefert auch wxMaxima:

```
eq1:x+y=3;
eq2:x-y=-1;
linsolve([eq1,eq2],[x,y]);
```

wenn wir fortfahren:

```
eq3:x+2*y=5;
linsolve([eq1,eq2,eq3],[x,y]);
```

ändert sich nichts an der Ausgabe, aber mit

```
eq4:x+2*y=6;
linsolve([eq1,eq2,eq4],[x,y]);
```

Liefert wxMaxima die Ausgabe:

```
Inkonsistent equations:  (3) -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

Das ist auch einleuchtend: Die beiden ersten Gleichungen haben die angegebene Lösung - und auch nur diese. Wenn weitere Gleichungen (d,h. Bedingungen) dazukommen und die schon vorhandene Lösung diese erfüllen, ändert sich nichts an der Lösung. Falls die vorhandene Lösung die neue zusätzliche Bedingung nicht erfüllen, gibt es keine passende Lösung mehr.

6.5 unterbestimmte Gleichungssysteme

Manchmal passiert es, dass in einem Problem mehr Unbekannte als Gleichungen auftauchen.
Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \end{array} \tag{6.59}$$

Hier ist z.B. $(x|y|z) = (1|2|0)$ eine Lösung, aber auch $(x|y|z) = (1|1|1)$ oder $(x|y|z) = (1|-24|26)$.

Wir versuchen noch einmal, dies Gleichungssystem „zu Fuß“ zu lösen:

$$\begin{array}{ccccccl}
x & + & y & + & z & = & 3 \quad | \\
x & - & y & - & z & = & -1 \quad | \\
\hline
 & & 2*y & + & 2*z & = & 4 \quad |\mathrm{I}-\mathrm{II} \\
2*x & & & & & = & 2 \quad |\mathrm{I}+\mathrm{II} \\
\hline
 & & y & + & z & = & 2 \quad |\mathrm{I}:2 \\
x & & & & & = & 1 \quad |\mathrm{II}:2 \\
\hline
 & & y & & & = & 2-z \quad |\mathrm{I}-z \\
x & & & & & = & 1 \quad |\mathrm{II} \\
\hline
\end{array} \tag{6.60}$$

Bei dieser Aufgabe hat also x immer den Wert 1. Den Wert für z können wir beliebig wählen; y ist dann $2-z$

6.5.1 mit Determinanten

Die Determinanten-Methode können wir hier eigentlich nicht wählen, da Determinanten nur für quadratischen Matrizen existieren. Mit einem kleinen Trick geht es doch:

$$\begin{array}{ccccccl}
x & + & y & + & z & = & 3 \quad | \\
x & - & y & - & z & = & -1 \quad | \\
\hline
x & + & y & & & = & 3-z \quad |\mathrm{I}-z \\
x & - & y & & & = & -1+z \quad |\mathrm{II}+z \\
\hline
\end{array} \tag{6.61}$$

```
(%i1) Mn: matrix([1,1],[1,-1]);
(%i2) Mx: matrix([3-z,1],[z-1,-1]);
(%i3) My: matrix([1,3-z],[1,z-1]);
(%i4) x: determinant(Mx)/determinant(Mn);
(%i5) y: determinant(My)/determinant(Mn);
(%i6) expand(%o5);
```

6.5.2 mit linsove

oder einfacher:

```
(%i1) eq1:x1+x2+x3=3;
(%i2) eq2:x1-x2-x3=-1;
(%i3) linsolve([eq1,eq2],[x1,x2,x3]);
(%o3) [x1=1,x2=2-%r1,x3=%r1]
```

Die Ausgabe ist so zu lesen, dass %r1 einen beliebigen Wert annehmen kann.

6.6 Aufgaben

6.6.1 Haus

Das schon oft benutzte Haus wird abgebildet:
A:(2|2); B:(7|2); C:(7|5); D:(6|17/3); E:(6|7); F:(5|7); G:(5|19/3); H:(4|7); I:(2|5)
A':(-4|14); B':(1|44); C':(-8|47); D':(-11|125/3); E':(-15|43) F':(-16|37); G':(-14|109/3); H':(-17|31); I':(-13|17)

Gesucht wird die Abbildungsmatrix!
Löse das Gleichungssystem

- einmal, wie du es bisher gemacht hast
- einmal mit wxMaxima und Determinanten! Speichere die Datei unter dem Namen `aufgabe_6_1_5d.wxm`!
- einmal mit wxMaxima und linsolve! Speichere die Datei unter dem Namen `aufgabe_6_1_5l.wxm`!

6.6.2 Kirche

Bei der Abbildung der 3-D-Kirche aus (**??**) erhält man:
J(4|8|10) → J'(56/3|15/2); K(6|10|0) → K'(18|11/4); S(4|12|18) → J'(68/3|27/2);

Ermittle auch hier die Abbildungsmatrix! Berechne und zeichne dann das Bild der ganzen Kirche! Speichere die Datei unter dem Namen `aufgabe_6_1_6.wxm`!

6.6.3 LGS

Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 9x + 11y + 3z &= 1 \\ 9x + 13y + 4z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Ich gebe absichtlich keine Kontroll-Lösung an. Weshalb wohl nicht?

- mit dem Diagonalisierungsverfahren
- mit Determinanten (**mit** und **ohne** wxMaxima)
- mit linsolve

6.6.4 unterbestimmtes LGS

Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 9x + 11y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

(wie: 6.6.3)

6.6.5 überbestmmtes LGS

Stelle selbst eines auf und bearbeite es!