Wachstum
mit oberer Schranke

1

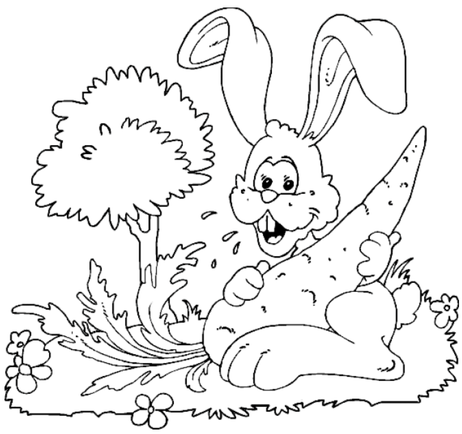
1.1 exponentielles Wachstum

Wir haben das Wachstum eines Kontos mit festem Zinssatz untersucht. Der jährliche Zuwachs (hier die Zinsen) sind proportional zum Bestand (hier dem jeweiligen Kontostand) . Die Annahme, daß der Zuwachs ΔB proportional zum Bestand B ist, führt zu exponentiellem Wachstum mit dem Änderungsfaktor r. Es gilt die Beziehung

$$B_{neu} = B_{alt} + \Delta B \tag{1}$$
$$= B_{alt} + r \cdot B_{alt} \tag{2}$$

Beim exponentiellen Wachstum gibt es kein Begrenzung. Eine solche Annahme ist aber fü viele Wachstumsvorgänge unrealistisch, wie man sich an einem einfachen Beispiel klarmachen kann.

1.2 Kaninchen auf der Insel



Wenn Kaninchen auf eine bislang nicht von Tieren bewohnte Insel gebracht werden, auf der sie also keine Feinde haben und auf der sie auch ein reichhaltiges Nahrungsangebot vorfinden, werden sie sich zunächst exponentiell vermehren. Aber schon das Platzangebot stellt sicher eine obere Schranke für das Wachstum dar, die sicher viel zu hoch angesetzt ist. Durch die Zunahme der Kaninchenzahl sinkt nämlich das Nahrungsangebot, da die Kaninchen die Vegetation abfressen und diese nicht genügend schnell nachwachsen kann. Die Kaninchen können sich nicht mehr mit dem anfänglichen Zuwachsfaktor vermehren. Ein Teil der Kaninchen wird „verhungern“. Die Insel bietet nur einer begrenzten Anzahl K_{max} (Sättigunsgrenze) von Kaninchen Lebensraum, Bei Annäherung an diese Sättigungsgrenze K_{max} wird der Zuwachs (die Änderung) ΔB der Kaninchen kleiner werden, d.h, bei Annäherung an K_{max} geht das Wachstumsverhalten der Population in ein begrenztes Wachstum über.

Realistisch kann das Wachstum einer Population demnach im Anfangszustand - wenn der Bestand noch weit von der Sättigungsgrenze entfernt ist - als exponentielles Wachstum und im fortgeschrittenen Zustand - wenn sich der Bestand der Sättigungsgrenze nähert - als begrenztes Wachstum beschrieben werden. Wenn ein ökologisches Gleichgewicht erreicht ist, wird sich (mit leichten Schwankungen) ein Nullwachstum einstellen.

Zur Beschreibung dieses Wachstums-Verhaltens, des sogenannten logistischen Wachstums, machte der belgische Mathematiker Pierre Francois Verhulst um 1845 für den Zuwachs ΔB den Ansatz

$$\Delta B = r \cdot B_{alt} \cdot (K_{max} - B) \tag{3}$$

1.3 Verhulst-Gleichung

Diesen Ansatz untersuchen wir genauer:

$$\begin{aligned} B_{neu} &= B_{alt} + \Delta B && (4)\\ &= B_{alt} + r \cdot B_{alt} \cdot (K_{max} - B_{alt}) && (5)\\ &= B_{alt} + B_{alt} \cdot (r \cdot K_{max} - r \cdot B_{alt}) && (6) \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Ansatz eines exponentiellen Wachstums - aber mit einen nicht mehr konstantem, sondern veränderlichem Änderungsfaktor $(r \cdot K_{max} - r \cdot B_{alt})$

Solange der Bestand B_{alt} der Kaninchen klein gegenüber der Sättigungsgrenze K_{max} ist, ist auch $r \cdot B_{alt}$ klein gegenüber $r \cdot K_{max}$. Man kann man den Summanden $r \cdot B_{alt}$ vernachlässigen, und es ist

$$B_{neu} \approx B_{alt} + B_{alt} \cdot r \cdot K \tag{7}$$

Die Änderung ΔB ist also proportional zum Bestand B_{alt}, d. h. in diesem Fall (zu Beginn des Wachstumsprozesses) liegt annähernd exponentielles Wachstum vor.

Wenn sich der Bestand B_{alt} nun aber später der Sättigungsgrenze K_{max} nähert, kann man B_{alt} durch K_{max} nähern. Dann ist:

$$\begin{aligned} \Delta B &\approx K_{max} \cdot (r \cdot K_{max} - r \cdot B_{alt}) && (8)\\ &= r \cdot K_{max} \cdot (K_{max} - B_{alt}) && (9) \end{aligned}$$

(mache Dir klar, dass sich die Differenz $(K_{max} - B_{alt})$ bei Änderungen von B_{alt} viel stärker ändert als B_{alt} selbst)

Im Extremfall $(B_{alt} = K_{max})$ liegt ein Nullwachstum vor.

Zwischen den beiden Extremfällen $B_{alt} = 0$ und $B_{alt} = K_{max}$ nimmt der Änderungsfaktor $r \cdot (K_{max} - B_{alt})$ des logistischen Wachstums linear vom Wert $r \cdot K$ zum Wert 0 ab. (Der Ausdruck $r \cdot (K_{max} - B_{alt})$ stellt den Funktionsterm einer linearen Funktion in der Veränderlichen B_{alt} dar.)

1.4 Modellieren mit der Tabellenkalkulation

Beginnt also eine Population mit dem Bestand B_0, so hat sie nach dem
1. Zeitintervall den Bestand $B_1 = B_0 + r \cdot B_0 \cdot (K_{max} - B_0)$ und nach dem
2. Zeitintervall den Bestand $B_2 = B_1 + r \cdot B_0 \cdot (K_{max} - B_1)$.

Wir könnten jetzt versuchen, den Term für B_1 aus der Ersten Gleichung in die zweite Gleichung einzusetzen, auszumultiplizieren und dann zusammenzufassen.

Dies ist aber nicht praktikabel. Schon für das dritte Zeitintervall erhalten wir den Term (Versuche bitte nicht, das nachzurechnen; ich habe ein Computer-Algebra-System benutzt, garantiere aber nicht, dass ich den Term korrekt übertragen habe):

$B_3 = -r^7B_0^8 + 4K_{max}r^7B_0^7 - 6K_{max}^2r^7B_0^6 + 4K_{max}^3r^7B_0^5 - K_{max}^4r^7B_0^4 + 4r^6B_0^7 - 14K_{max}r^6B_0^5 + 18K_{max}^2r^6B_0^5 - 10K_{max}^3r^6B_0^4 + 2K_{max}^4r^6B_0^3 - 8r^5B_0^6 + 24K_{max}r^5B_0^5 - 25K_{max}^2r^5B_0^4 + 10K_{max}^3r^5B_0^3 - K_{max}^4r^5B_0^2 + 10r^4B_0^5 - 25K_{max}r^4B_0^4 + 20K_{max}^2r^4B_0^3 - 5K_{max}^3r^4B_0^2 - 9r^3B_0^4 + 18K_{max}r^3B_0^3 - 10K_{max}^2r^3B_0 + K_{max}^3r^3B_0 + 6r^2B_0^3 - 9K_{max}r^2B_0^2 + 3K_{max}^2r^2B_0 - 3rB_0^2 + 3K_{max}rB_0 + B_0$

Viel einfacher ist es, die Populationsentwicklung Schritt für Schritt zu berechnen - natürlich von der Tabellenkalkulation.

Im Kopf der Tabelle legen wir Werte für die Konstanten fest, ab Zeile 9 folgen die Rechnungen:

	A	B	C	D
3	Parameter			
4	r	0,005		
5	K_max	100		
6	B_0	5		
7				
8	Zeit	Änderung ΔB	Bestand	
9	0	0	=B6	
10	=a9+1	=$B$4*C9*($B$5-C9)	=C9+B10	
11	=a10+1	=$B$4*C10*(BC10)	=C10+B11	
12	...	...	...	...

Bei diesem Beispiel wachst die Population zunächst exponentiell an; im mittleren Teil verläuft die Kurve nahezu geradlinig; im letzten Teil verläuft die Kurve asymptotisch gegen die Sättigungsgrenze 100.

Im Diagramm ist zusätzlich die Änderung ΔB eingetragen (blaue Quadrate). Diese steigt vom Wert 0 bis etwa zum Wert 12 an und sinkt dann wieder auf 0 ab. Die Änderung ist etwa beim Zeitintervall 8 am größten und beim Zeitintervall 16 wieder auf nahezu 0 abgesunken.

Zu diesem Zeitpunkt hat auch der Bestand die größtmögliche Zahl 100 (die Sättigungsgrenze) beinahe erreicht.

1.5 Ergänzende Aufgabe 1

Bei obigem Beispiel ist der Zuwachs (die Änderung) etwa dann am größten, wenn der Bestand auf den halben Sättigungswert angewachsen ist.

1. Verändere die Werte in der Tabelle und versuche zu einer Vermutung zu gelangen, für welchen Wert von B_0 bei allgemeinem K_{max} bzw. r der Zuwachs ΔB am größten ist.
   Hinweis: Erstelle für $K_{max} = 80$; 100; 120; 180 und jeweils für r = 0,001; 0,002; 0,004; 0,005; 0,006; 0,008; 0,010 das Diagramm für den Bestand und ür den Zuwachs
2. Untersuche mit der Tabelle, ob sich der Zeitraum, bis zu dem mindestens 99% der Sättigungsgrenze erreicht ist, verändert, wenn man die Sättigungsgrenze vergrößert.
3. Warum kann der Sättigungswert K_{max} in einer endlichen Zeit nicht exakt erreicht werden?

1.6 Bakterienkultur I

Eine Bakterienkultur wächst nach dem logistischen Wachstumsgesetz mit r = 0,02 und bedeckt nach l0 Stunden eine Fläche von 5 cm^2. Zu Beginn bedeckte die Kultur eine Fläche von l cm^2.

1. Versuche mit einer Tabelle (dem Diagramm) durch Ändern der Parameterwerte die Sättigungsgrenze K_{max} zu bestimmen.
2. Erstelle wie oben eine Tabelle mit den Parametem r, K_{max} und B_0.
3. In welcher Stunde ist die Änderung am größten?
4. Wie groß ist diese maximale Änderung?

1.7 Bakterienkultur II

Eine Bakterienkultur wächst nach dem logistischen Wachstumsgesetz mit r = 0,02 und der Sättigungsgrenze K = 20 cm^2. Sie bedeckt nach l0 Stunden eine Fläche von 8 cm^2.

1. Versuche wieder mit einer Tabelle (dem Diagramm) durch Ändern der Parameterwerte den Anfangswert B_0, die Fläche , die die Bakterienkultur zur Zeit 0 bedeckte, zu bestimmen.
2. Erstelle wie oben eine Tabelle mit den Parametem r, K_{max} und B_0.
3. In welcher Stunde ist die Änderung am größten?
4. Wie groß ist diese maximale Änderung?

1.8 Bifurkation

Wähle r = 0,005 und $B_0 = 5$ und erstelle für K_{max} von $K_{max} = 360$ bis 600 in 20er Schritten das Diagramm für den Bestand.

Von einem bestimmten Wert von K an scheint es zwei, bei größeren Werten von K_{max} sogar vier Sättigungsgrenzen zu geben. Diese Erscheinung, die in der Chaostheorie eine Rolle spielt, nennt man Bifurkation. Bei weiterem Anwachsen von K_{max} tritt „chaotisches“Verhalten ein. Filr größere Werte von K_{max} versagt unser Modell. Es gibt die Realität nicht mehr wieder.

1.9 Vergleiche

Benutze wieder die Tabelle mit den Werten aus Abschnitt (1.4).

1. Ergänze die Tabelle durch eine Spalte für das rein exponentielle Wachstum gemäß der Beziehung (7) und durch eine weitere Spalte für das begrenzte Wachstum nach der Beziehung (9).

2. Erstelle für die drei Wachstumsfonnen ein gemeinsames Diagramm, in dem der oben beschriebene Sachverhalt verdeutlicht wird.