

Wachstum

linear & exponentiell

1 Lineares Wachstum

Oma Lehmann hat am 1 Januar 100 € in ihrem Sparstrumpf. Sie steckt jeden ersten Sonntag eines Monats 10 € dazu.

Das Anwachsen ihres Kapitals kann man so beschreiben:

Am Anfang hat sie das Kapital $K : 0$. In jeden Zeitintervall Δt wächst es um einen **Zuwachs** ΔK an. Diesen Zuwachs ΔK nennen wir auch **Änderung**

Zeit	Kapital			(Oma Lehmann)
0	K_0			(100 €)
$1 \cdot \Delta t$	K_1	$= K_0 + \Delta K$		(110 €)
$2 \cdot \Delta t$	K_2	$= K_1 + \Delta K$	$= K_0 + 2 \cdot \Delta K$	(120 €)
$3 \cdot \Delta t$	K_3	$= K_2 + \Delta K$	$= K_0 + 3 \cdot \Delta K$	(130 €)
$4 \cdot \Delta t$	K_4	$= K_3 + \Delta K$	$= K_0 + 4 \cdot \Delta K$	(140 €)
...	...			

Der Zuwachs (die Änderung) ΔK ist konstant (im Beispiel $\Delta K = 10$) ist konstant.

Für den Schritt von einem zum nächsten Monat gilt:

$$K_{neu} = K_{alt} + \Delta K \tag{1}$$

Das Kapital nach n Monaten berechnet sich aus dem alten Kapital und dem Zuwachs nach der Beziehung:

$$K_n = K_0 + n \cdot \Delta K \tag{2}$$

2 Exponentielles Wachstum

Oma Ernsting hat ebenfalls 100 € - allerdings in der Spardose. Sie nimmt sich vor, jeden Monat 10% des Betrages, der in der Spardose ist dazuzuwerfen.

Zeit	Kapital			(Oma Ernsting)
0	K_0			(100 €)
$1 \cdot \Delta t$	K_1	$= K_0 + \Delta K$		(110 €)
$2 \cdot \Delta t$	K_2	$= K_1 + \Delta K$		(121 €)
$3 \cdot \Delta t$	K_3	$= K_2 + \Delta K$		(133,10 €)
$4 \cdot \Delta t$	K_4	$= K_3 + \Delta K$		(146,41 €)
...	...			

Auch hier berechnet sich das neue Kapital aus dem alten nach der Beziehung:

$$K_n = K_0 + n \cdot \Delta K \tag{3}$$

Der Zuwachs (die Änderung) ist diesmal aber nicht konstant. Er ist immer proportional zum momentan vorhandenen Bestand:

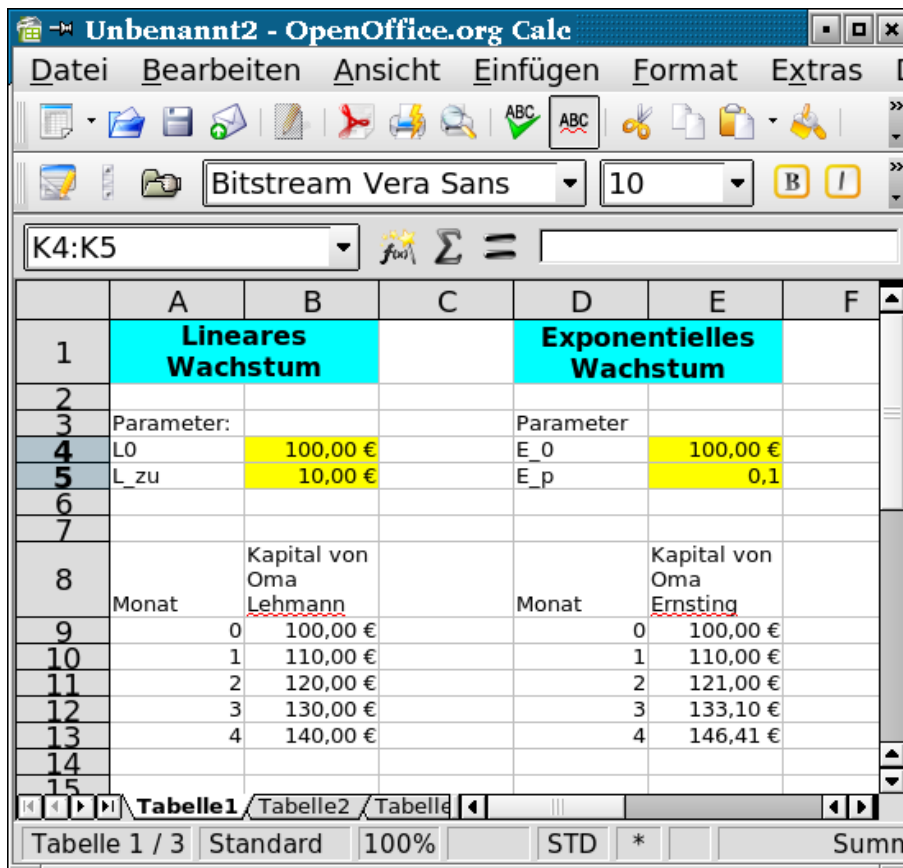
$$\Delta K = p \cdot K_{alt} \tag{4}$$

Den Faktor p nennen wir den **Zuwachsfaktor**

3 Aufgaben

3.1

Erstelle die Tabelle!



	A	B	C	D	E	F
1	Lineares Wachstum			Exponentielles Wachstum		
2						
3	Parameter:			Parameter		
4	L0	100,00 €		E_0	100,00 €	
5	L_zu	10,00 €		E_p	0,1	
6						
7						
8	Monat	Kapital von Oma Lehmann		Monat	Kapital von Oma Ernsting	
9	0	100,00 €		0	100,00 €	
10	1	110,00 €		1	110,00 €	
11	2	120,00 €		2	121,00 €	
12	3	130,00 €		3	133,10 €	
13	4	140,00 €		4	146,41 €	
14						
15						

3.2

Bestimme den jeweiligen „Sparstrumpfstand“ am Ende des ersten, zweiten, ... , fünften Jahres.

3.3

Stelle die Kapital-Entwicklung einmal für das ersten Jahr, dann für die ersten fünf Jahre in einem Diagramm dar.

4 Bemerkung

Die beiden Graphen sind sehr verschieden. Dies wird bei dem Diagramm für die ersten fünf Jahre besonders deutlich.

Die Punkte zum Geldbestand von Oma Lehmann liegen auf einer Geraden; sie veranschaulichen das **lineare Wachstum**.

Die Punkte zum Spardoseninhalt von Oma Ernsting liegen auf einer Kurve. Sie gibt das **exponentielle Wachstum** wieder.

Lineares Wachstum:	<i>Der Zuwachs ist in allen Zeitschritten gleich</i>
Exponentielles Wachstum	<i>Der Zuwachs ist proportional zum aktuellen Stand</i>

5 weitere Aufgaben