Heron-Verfahren
zur Wurzelberechnung

1

1.1 Verfahren von Heron zur Berechnung von Quadratwurzeln

Das Verfahren von Heron zur Berechnung der Wurzel aus einer Zahl q basiert auf der folgenden Überlegung:

Hat ein (nicht-quadratisches) Rechteck die Fläche q, so ist eine Seite länger, eine kürzer als $\sqrt{q}$

Der Mittelwert der beiden Seitenlängen ist ein besserer Näherungswert für $\sqrt{q}$ als die beiden vorherigen Seitenlängen.

1.1.1 Beispiel: q=4

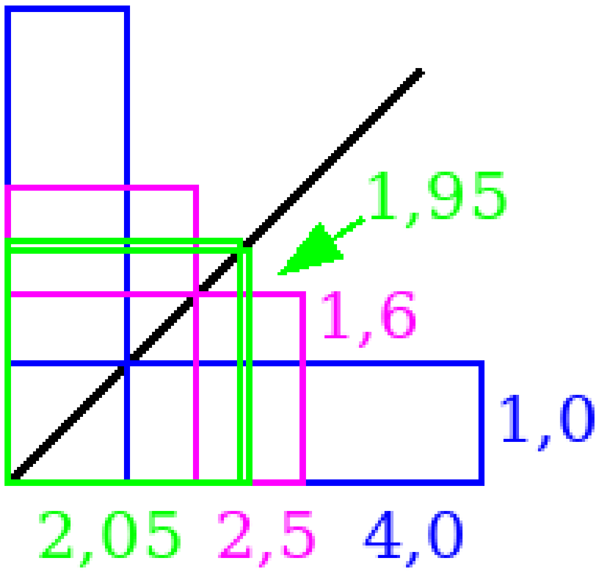

Abbildung 1: Zum Verfahren von Heron

Obwohl wir es besser wissen, beginnen wir mit der Näherung $a_1 = 4 \approx \sqrt{4}$.

Als nächstes suchen wir ein Rechteck, dessen eine Seite die Näherung $a_1 = 4 \approx \sqrt{4}$ ist, das aber trotzdem Die Fläche 4 besitzt. Die Flaeche A eines Rechtecks mit den Seiten a und b beträgt bekanntlich

$$A = a \cdot b \tag{1}$$

Damit können wir die zweite Seite des Rechtecks mit

$$b_1 = \frac{A}{a_1} = \frac{4}{1} \tag{2}$$

berechnen.

Die beiden **blauen** Rechtecke haben jeweils die Seitenlängen $4 > \sqrt{4}$ und $1 < \sqrt{4}$. Sie sehen aber ganz eindeutig nicht wie ein Quadrat aus.

Als nächste Näherung benutzen wir den Mittelwert dieser beiden:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2} && (3) \\ &= \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 && (4) \end{aligned}$$

Ein Rechteck (in der Zeichnung **magenta**) mit der Fläche $q = 4$, dessen eine Seite die Länge $a_2 = 2,5$ hat, hat eine zweite Seite mit der Länge .

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{q}{a_2} && (5) \\ &= \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5} = 1,6 && (6) \end{aligned}$$

Aus hier ist $a_2 > \sqrt{4}$ und $b_2 < \sqrt{4}$, der Unterschied der beiden Seitenlängen ist aber schon viel geringer.

Als nächste Näherung benutzen wir wieder den Mittelwert dieser beiden,

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_2 + b_2}{2} && (7) \\ &= \frac{\frac{5}{2} + \frac{8}{5}}{2} = \frac{41}{20} = 2,05 && (8) \end{aligned}$$

und erhalten als zweite Rechteckseite:

$$b_3 = \frac{q}{a_3} \qquad = \frac{4}{\frac{41}{20}} = \frac{80}{41} = 1,95 \tag{9}$$

Aus hier ist wieder $a_3 > \sqrt{4}$ und $b_3 < \sqrt{4}$. Das **gruene** Rechteck ist zwar immer noch kein Quadrat; man könnte es aber bei flüchtigem, ungenauem Hinsehen für eines halten.

1.1.2 Iterationsverfahren

Wir können verallgemeinern:

Wenn wir mit a_n eine Näherung für $\sqrt{q}$ gefunden haben, so erhalten wir mit

$$b_n = \frac{q}{a_n} \tag{10}$$

und anschließend mit

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \tag{11}$$

die nächste - genauere - Näherung.

Wir wollen das Verfahren mit einer Tabellenkalkulation darstellen. Deshalb verzichten wir hier auf die Umformung

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{q}{a_n}}{2} \tag{12}$$

$$= \frac{a_n^2 + q}{2a_n} \tag{13}$$

Ob wir auf diesem Weg wirklich zu einem genauen Ergebnis für $\sqrt{q}$ kommen, können wir noch nicht klären.

1.1.3 Tabellenkalkulation

(dargestellt werden nur die Iterationsschritte)

Der Näherungswert a_n wird in die Zelle B7 übernommen:

= C4

Die Zahl aus der die Wurzel gezogen werden soll in Zelle C3.

Dann berechnen wir in Zelle C7 die zweite Rechteckseite:

= A7/C3

Für die Rechnung weniger wichtig - aber doch ganz interessant ist es, in Zelle D7 den Abstand der beiden Näherungslösungen (also die Intervallbreite) zu berechnen;

= ABS(B7-C7)

und in Zelle B9 (nächste Zeile!) den nächsten Näherungswert:

= (A7 + B7)/2

Die Formeln der Zellen D7 und D7 werden auf die Felder C8 und D8 kopiert.

Nun kann man die ganze Zeile weiter kopieren.

Wir sehen, dass die Genauigkeit der Tabellenkalkulation schon nach sechs Schritten (vgl. Abb 2) keine weitere Näherung mehr ermöglicht.

Wenn wir in Zelle B3 die Zahl 4 durch die Zahl 7 ersetzen (Eingaben nur in eine der beiden gelben Zellen!), bekommen wir die in (Abb 3) gezeigte Tabelle.

Auch hier können wir nach sieben Schritten keine höhere Genauigkeit mehr erreichen.

Probiere weitere Kombinationen von q und a_1. Du wirst sehen, dass es bei sinnvollen Vorgaben immer nach wenigen Schritten keine weitere Verbesserung des Ergebnisses gibt - die Grenze liegt hier in der Rechengenauigkeit der Tabellenkalkulation. Sogar bei sehr unsinnige Vorgaben (z.B. $\sqrt(4) \approx 1000$) (vgl. Abb 4)ist man nach weniger als 20 Schritten fertig.

	A	B	C	D
1		**Verfahren von Heron**		
2				
3		x²	4	
4		a_1	1	(1.Näherung)
5				
6	Schritt	a_n	b_n	delta
7	1	1	4	3
8	2	2,5	1,6	0,9
9	3	2,05	1,95122	0,09878
10	4	2,00061	1,99939043	0,0012193264
11	5	2,00000009292	1,99999990708	0,00000018584458527649
12	6	2,0000000000000000000	2,0000000000000000000	0,0000000000000000000
13	7	2,0000000000000000000	2,0000000000000000000	0,0000000000000000000
14				

Abbildung 2: Näherung von $\sqrt{4}$

	A	B	C	D
1		**Verfahren von Heron**		
2				
3		x²	7	
4		a_1	1	(1.Näherung)
5				
6	Schritt	a_n	b_n	delta
7	1	1	7	6
8	2	4	1,75	2,25
9	3	2,88	2,43478	0,44022
10	4	2,65489	2,63664278	0,0182485203
11	5	2,64576704419	2,64573557803	0,00003146615784110910
12	6	2,6457513111137000000	2,6457513101781000000	0,0000000009355760611
13	7	2,6457513110645900000	2,6457513110645900000	0,0000000000000000000
14	8	2,6457513110645900000	2,6457513110645900000	0,0000000000000000000
15	9	2,6457513110645900000	2,6457513110645900000	0,0000000000000000000
16	10	2,6457513110645900000	2,6457513110645900000	0,0000000000000000000
17				

Abbildung 3: Näherung von $\sqrt{7}$

	A	B	C	D
1		**Verfahren von Heron**		
2				
3		x²	4	
4		a_1	1000	(1.Näherung)
5				
6	Schritt	**a_n**	**b_n**	**delta**
7	1	1000	0	1000
8	2	500	0,01	499,99
9	3	250	0,01600	249,98900
10	4	125,01050	0,03199731	124,9785025197
11	5	62,52124857214	0,06397824886	62,45727032327920000000
12	6	31,29261341049660000000	0,12782569316049100000	31,16478771733610000000
13	7	15,71021955182860000000	0,25461133670372100000	15,45560821512480000000
14	8	7,98241544426614000000	0,50110145580975000000	7,48131398845639000000
15	9	4,24175845003795000000	0,94300513504351400000	3,29875331499443000000
16	10	2,59238179254073000000	1,54298260059900000000	1,04939919194173000000
17	11	2,06768219656987000000	1,93453326949166000000	0,13314892707820700000
18	12	2,00110773303076000000	1,99889288016584000000	0,00221485286492129000
19	13	2,00000030659830000000	1,99999969340174000000	0,00000061319655753067
20	14	2,00000000000002000000	1,99999999999998000000	0,00000000000004707346
21	15	2,00000000000000000000	2,00000000000000000000	0,00000000000000000000
22	16	2,00000000000000000000	2,00000000000000000000	0,00000000000000000000
23	17	2,00000000000000000000	2,00000000000000000000	0,00000000000000000000
24	18	2,00000000000000000000	2,00000000000000000000	0,00000000000000000000
25	19	2,00000000000000000000	2,00000000000000000000	0,00000000000000000000

Abbildung 4: Näherung von $\sqrt{4}$ mit ungeschicktem Startwert