Ausbreitung eines Gerüchtes
(logistisches Wachstum 1)

1

1.1 Modell „Gebäude“

Wir nehmen an, dass in einem Forstamt jeder der fünfzig Mitarbeiter ein eigenes Büro hat. Da Urlaubs-zeit ist, nehmen wir an, dass z.Zt. nur 20 Büros besetzt sind.

Die anwesenden müssen häufig zu einem Kollegen, um mit diesem etwas zu besprechen.

Eines Tages taucht das Gerücht auf, der verheiratete Amtsleiter habe eine Affäre mit einer kürzlich in ein anderes Amt versetzte Kollegin gehabt.

Im Bild ist folgende Situation dargestellt:

Es sind in den $r = 50$ Räumen $n = 20$ Personen anwesend. Drei ($w = 3$) von ihnen (W) sind Wissende, kennen das Gerücht also schon, 17 (U) sind noch uninformiert.

	U				U		U	W	
	U	U			U	U		U	
		W		U	U				
			U		W		U		
U		U		U		U			U

Die Ausbreitung des Gerüchtes wollen wir schrittweise modellieren:

Jeder Informierte sucht in jeder Stunde zufällig einen Raum auf (dies kann auch der eigene sein, wenn er nichts zu besprechen hat). Dann tritt eine der folgenden Situationen auf (die Anzahl der Fälle ist gelb unterlegt):

- r-n = 30 er trifft niemanden an
- n = 20 er trifft jemand an
  - w=3 derjenige kennt das Gerücht schon (I)
  - n-w=17 derjenige kennt das Gerücht noch nicht (U)

In n von r Fällen wird er also einen Raum treffen, in dem sich eine Person befindet, d.h. die relative Häufigkeit jemand anzutreffen ist $\frac{n}{r}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er dann die Information weiter geben kann, ist $\frac{n-w}{n}$, denn nur in $n-w$ von diesen n Fällen ist das Gerücht noch unbekannt.

Jeder einzelne Wissende informiert also durchschnittlich je Stunde

$$\frac{n}{r} \cdot \frac{n-w}{n}$$

weitere Mitarbeiter über das Gerücht.

Da aber jeder Wissende so vorgeht (und am Anfang schon drei Personen informiert waren), werden jede Stunde

$$\Delta p = p \cdot \frac{n}{r} \cdot \frac{n-w}{n} \tag{1}$$

Mitarbeiter neu informiert.

Der Bruch $\frac{n}{r}$ gibt die durchschnittlichen Zahl von Personen je Raum an und ändert sich in diesem Modell nicht. Wir kürzen deshalb nicht durch n, sondern bezeichnen den Bruch $\frac{n}{r}$ mit a.

Damit erhalten wir für die stündliche Zunahme Δw:

$$\Delta w = w \cdot a \cdot \frac{n-w}{n} = w \cdot a \cdot \left(1 - \frac{w}{n}\right) \tag{2}$$

Hier ist w die Zahl der Informationsträger am Anfang eines Zeitintervalls Δt. In diesem Intervall kommen Δw Personen dazu, so dass am Ende des Zeitintervalls $w + \Delta w$ Personen von dem Gerücht wissen.

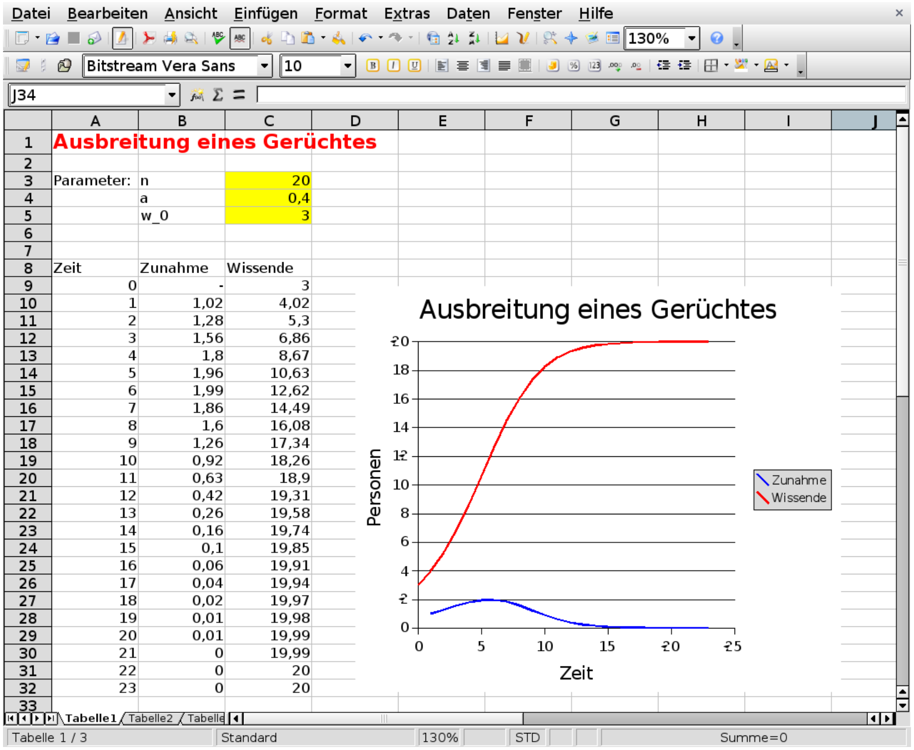
$$\boxed{w_{neu} = w_{alt} + \Delta w = w_{alt} + w_{alt} \cdot a \cdot \left(1 - \frac{w_{alt}}{n}\right)} \tag{3}$$

Beachte, dass a in unserem Modell eigentlich nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann.

Mit den gegebenen Werten

- $n = 20$ für die Gesamtzahl der Personen
- $a = \frac{n}{r} = 0,4$ für die durchschnittliche Zahl der Personen je Raum
- $w_0 = 3$ für die Anzahl der Personen, die das Gerücht am Anfang schon kennen

können wir dann eine Tabelle aufbauen ($\hookrightarrow$ Abbildung 1)



Zeit	Zunahme	Wissende
0	-	3
1	1,02	4,02
2	1,28	5,3
3	1,56	6,86
4	1,8	8,67
5	1,96	10,63
6	1,99	12,62
7	1,86	14,49
8	1,6	16,08
9	1,26	17,34
10	0,92	18,26
11	0,63	18,9
12	0,42	19,31
13	0,26	19,58
14	0,16	19,74
15	0,1	19,85
16	0,06	19,91
17	0,04	19,94
18	0,02	19,97
19	0,01	19,98
20	0,01	19,99
21	0	19,99
22	0	20
23	0	20

Abbildung 1:

Als entscheidende Formeln wurden benutzt:

- **C9 :** $=$ *C5*
- **B10:** $=$*C4*C9*(1-C9/C3)*
- **C10:** $=$*C9+B10*

1.2 Aufgabe 1

Benutze die Werte: $n = 10000$; $w_0 = 10$! Führe die folgenden Untersuchungen für folgende Werte a durch:

$$a = 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,9$$

1.2.1

Untersuche mit Hilfe der Tabelle (oder des Diagramms), nach wie viel Zeitintervallen etwa 20%, 33,3%, 50%, 90%, 99% der Personen vom Gerücht gehört haben!

1.2.2

Untersuche mit der Tabelle, wie die Zeitdauer, bis zu der die Hälfte der Personen das Gerücht kennen vom Wert des Parameters a abhängt!

1.2.3

Untersuche, zu welchen Zeitpunkt die Zunahme der Informationsträger am größten ist!

1.3 Aufgabe 2

In einem Betrieb mit 1000 Mitarbeitern wird am Montagmorgen ein kleiner Kreis von 10 Personen vertraulich darüber informiert, dass der Betrieb an einen 50 km entfernten Ort verlegt werden soll. Trotz der Vertraulichkeit wissen am nächsten Montagmorgen (also nach 7 Tagen) bereits weitere 20 Beschäftigte Firmenangehörige davon.

1.3.1

Benutze das obige Modell und bestimme a durch ausprobieren!

1.3.2

Untersuche mit Hilfe der Tabelle (oder des Diagramms), nach wie viel Tagen etwa die Hälfte, nach wie viel Tagen 99% der Mitarbeiter vom Gerücht gehört haben!

1.3.3

Löse die beiden letzten Teilaufgaben auch für den Fall, dass nach vier Tagen bereits insgesamt 50 Mitarbeiter das Gerücht kennen!