Fibonacci
(TK-Beispiele)

Sammlung von Beispielen; deutlich mehr, als wir im Unterricht hatten
Versuche, möglichst viele Beispiele mit Hilfe von LibreOffice-Calc zu bearbeiten.

Diese Datei enthält zu einigen Aufgaben Lösungsskizzen. Es sollte klar sein, dass ihr mehr davon habt, wenn ihr zuerst ernsthaft versucht, die Aufgaben selbst zu lösen und dann nachseht, oder - noch besser - eure und meine Lösung vergleicht.

Inhaltsverzeichnis

0 [Information]

Der italienische Mathematiker Fibonacci (eigentlich Leonardo von Pisa, 1170-1250) stellt in seinem Buch „Liber Abaci“ folgende Aufgabe:

> *Ein Mann hält ein Kaninchenpaar an einem Ort, der gänzlich von einer Mauer umgeben ist. Wir wollen nun wissen, wie viele Paare von ihnen in einem Jahr gezüchtet werden können, wenn die Natur es so eingerichtet hat, dass diese Kaninchen jeden Monat ein weiteres Paar zur Welt bringen und damit im zweiten Monat nach ihrer Geburt beginnen.*

Fibonacci geht davon aus, dass die beiden am Anfang vorhandenen Kaninchen gerade geboren sind.

Das Beispiel ist nicht sehr realistisch; Fibonacci vernachlässigt bei seinen Untersuchungen, dass die Kaninchen erst mit 4-5 Monaten geschlechtsreif werden, dass sie mehr als zwei Junge werfen und dass sie nach etwa 6-8 Jahren sterben. Diese Aspekte sollst Du bei deiner Lösung vorerst auch ignorieren.

1 Fibonacci-Folge der Kaninchen-Pärchen

1.1

- *Wann kommt das zweite Paar dazu?*
- *Wann hat dies Paar die ersten Nachkommen?*
- *Bestimme (ggf. mit Taschenrechner), wie viele Paare der Mann nach 1,2,3,...12 Monaten hat und stelle dies in einer Tabelle dar.*
- *Wie kannst Du feststellen, wie viele Kaninchen später in irgendeinem Monat geboren werden?*

Er hat am Anfang ein Paar neugeborene Kaninchen.

- Im ersten Monat ändert sich noch nichts.
- Im zweiten Monat hat dieses Kanninchenpaar die ersten Nachkommen; der Mann hat jetzt zwei Paare, von denen eines fortpflanzungsfähig ist.
- Im dritten Monat hat das erste Paar wieder Nachkommen; es sind jetzt drei Paare, von denen weiter nur das erste fortpflanzungsfähig ist.
- Im vierten Monat ist auch das im zweiten Monat geborene Paar fortpflanzungsfähig. Damit kommen zwei Paare dazu; er hat fünf Paare.
- Im fünften Monat sind die drei Paare, die schon im dritten Monat lebten, fortpflanzungsfähig; es kommen drei Paare dazu, er hat acht Paare.
- Im sechsten Monat sind die fünf Paare, die schon im vierten Monat lebten, fortpflanzungsfähig; es kommen fünf Paare dazu, er hat 13 Paare.
- Im 7. Monat sind die 8 Paare, die schon im 5. Monat lebten, fortpflanzungsfähig; es kommen 8 Paare dazu, er hat 21 Paare.
- Im 8. Monat sind die 13 Paare, die schon im 6. Monat lebten, fortpflanzungsfähig; es kommen 13 Paare dazu, er hat 34 Paare.
- Im 9. Monat sind die 21 Paare, die schon im 7. Monat lebten, fortpflanzungsfähig; es kommen 21 Paare dazu, er hat 55 Paare.
- Im 10. Monat sind die 34 Paare, die schon im 8. Monat lebten, fortpflanzungsfähig; es kommen 34 Paare dazu, er hat 89 Paare.

- ...
- In jedem Monat kommt die Anzahl der Paare, die schon zwei Monate vorher lebten, dazu.

1.2

Erkläre, was sich an den im letzten Abschnitt berechneten Werten ändert, wenn der Mann keine neugeborene , sondern erwachsene Kaninchen hat!
schon im ersten Monat kommt ein Paar dazu, im zweiten auch eines, im dritten zwei usw.

	Monat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(neugeborene)	Paare	1	1	2	3	5	8	13	34	55	89	144	233	377
(erwachsene)	Paare	1	2	3	5	8	13	34	55	89	144	233	377	610

2 Aufgabe: Tabelle der Fibonacci-Folge

2.1

Erstelle eine Tabelle, in der (mit den Angaben von Fibonacci) in der ersten Spalte die Zahl der Monate, in der zweiten die Anzahl der Kaninchen und in der dritten der Zuwachs des jeweils letzten Monats steht!

2.1.1

Stelle das Ergebnis graphisch dar!

2.2

Ergänze die Tabelle um zwei weitere Spalten, die die Entwicklung für den Fall neugeborener Kaninchen darstellen. Ergänze die graphischen Darstellung!

2.3

Kopiere die Tabelle und lösche die Spalten für den Fall, dass es sich um Neugeborene handelt.
Diese Kaninchen werden nur 10 Monate alt.
Füge eine Spalte „Gestorben“ ein und passen die Spalte mit der Anzahl an.

3 Fibonacci-Folge und exponentielles Wachstum

3.1

Der Graph erscheint ähnlich zum exponentiellen Wachstum zu sein.
Versuche Werte für ein Modell exponentiellen Wachstums zu finden, das dem Graphen der Fibonacci-Folge möglichst nahe kommt.
Ein Tipp: am Anfang machen sich die Unterschiede am deutlichsten bemerkbar. Gehe vom Bestand nach 12 Monaten aus und „verlängere“ die Tabelle nach oben und nach unten.

4 Realität der Kaninchen-Population

4.1

Informiere Dich, in welchem Alter Kaninchen geschlechtsreif werden und wie alt sie werden. Nimm ggf. Mittelwerte, falls du keine eindeutigen Informationen findest.

4.2

Stelle das Modell mit diesen Werten dar.

5 Rekursion

Betrachte die Folge der Zahlen, die durch die **Rekursionsformel** definiert sind:

$$f_1 = 1 \tag{1}$$
$$f_2 = 1 \tag{2}$$
$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \tag{3}$$

Die letzte Zeile bedeutet folgende: wenn f_n und f_{n+1} schon bekannt sind, kann man f_{n+2} berechnen, indem man diese beiden addiert.
Also z.B.: es ist für n=5 : $f_5 = 5$; $f_6 = 8$; damit ist $f_7 = f_5 + f_6 = 13$
Das Problem bei dieser Methode ist, dass man alle Werte vorher berechnet haben muss.
Berechne die Werte dieser Formel für n=1 bis n = 15!
Begründe mit Hilfe der Geschichte von Leonardo, dass diese Folge zur Geschichte passt!
Die Folge der Zahlen 1,1,2,3,5,8,13,21,... heißt übrigens **Fibonacci-Folge**

6 Fibonacci-Folge mit anderen Startwerten

Bei den Angaben zur rekursiven Fibonacci-Formel sollen jetzt die Auswirkungen einer Änderung der Startwerte untersucht werden:

6.1

$x_1 = 1; x_2 = 2$

6.2

$x_1 = 2; x_2 = 2$

6.3

$x_1 = 0; x_2 = 1$

7 Binet-Formel

Im Jahr 1843 veröffentlichte der französische Mathematiker Binet folgende Formel, die nach ihm benannt wurde, obwohl sie vorher schon anderen Mathematikern bekannt war.

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}} \tag{4}$$

Berechne einige Werte und vergleiche sie mit der Fibonacci-Folge!

8 Einige Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen

Prüfe an Beispielen, ob die im folgenden behaupteten Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind!

8.1

Aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen sind immer teilerfremd

8.1.1 teilerfremd

Ich benutze folgenden Hilfssatz:

$$ggT(a, a+b) = ggT(a, b) \tag{5}$$

wenn t der ggT von a und von $a+b$ ist, gibt es Zahlen r,s,t so dass $a = r \cdot t$ und $a+b = (r+s) \cdot t$; t ist also auch Teler von b. Der ggT von a und b kann aber auch nicht größer als t sein, weil dieser dann auch Teiler von $a+b$ wäre.

8.1.2

Nun zum Beweis der Behauptung:
Ich benutze auch hier die vollständige Induktion; sieh Dir vorher die Lösung zu (8.8.1) an!
Der Induktionsanfang ist gegeben: $ggt(f_1, f_2) = 1$
Mit dem eingebauten Befehl ggt(zahl1;zahl2) kannst du in OOCalc problemlos überprüfen, ob die Behauptung für alle damit berechneten Fibonaccizahlen gilt
Ich nehme also an, dass die Behauptung bis zu einer natürlichen Zahl k richtig ist, also $ggT(f_k, f_{k+1}) = 1$
Dann gilt für

$$ggT(f_{k+1}, f_{k+2}) = ggT(f_{k+1}, f_{k+1} + f_k) = ggT(f_{k+1}, f_k) = ggT(f_k, f_{k+1}) = 1 \tag{6}$$

8.2 Summe zehn aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen

Die Summe von beliebigen zehn aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen ist immer durch elf teilbar
Es seien $f_n = a$ und $f_{n+1} = b$ zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen. Dann gilt für diese und die neun nächsten:

$$
\begin{aligned}
f_n &= a & &= a & (7)\\
f_{n+1} &= b & &= b & (8)\\
f_{n+2} &= f_n + f_{n+1} & &= a+b & (9)\\
f_{n+3} &= f_{n+1} + f_{n+2} = b + a + b & &= a+2b & (10)\\
f_{n+4} &= f_{n+2} + f_{n+3} = (a+b) + (a+2b) & &= 2a+3b & (11)\\
f_{n+5} &= f_{n+3} + f_{n+4} = (a+2b) + (2a+3b) & &= 3a+5b & (12)\\
f_{n+6} &= f_{n+4} + f_{n+5} = (2a+3b) + (3a+5b) & &= 5a+8b & (13)\\
f_{n+7} &= f_{n+5} + f_{n+6} = (3a+5b) + (5a+8b) & &= 8a+13b & (14)\\
f_{n+8} &= f_{n+6} + f_{n+7} = (5a+8b) + (8a+13b) & &= 13a+21b & (15)\\
f_{n+9} &= f_{n+7} + f_{n+8} = (8a+13b) + (13a+21b) & &= 21a+34b & (16)
\end{aligned}
$$

wenn wir nun die rechten Seiten addieren, erhalten wir als Summe der zehn aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen:

$$f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_{n+9} = 55a + 88b = 11(5a+8b) \qquad (17)$$

Diese Summe ist durch 11 teilbar. Da a und b zwei beliebige aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen sind, gilt dies für alle.
Man kann dies leicht mit der Tabellenkalkulation überprüfen:
Z.B

- Beginn in Zeile 11
- Index in Spalte A
- Fibonacci-Zahlen in Spalte B
- Formel in C20: =SUMME(B11:B20)
- Formel in D20: =C20/11)
- Formel in E20: =REST(C20;11)

Wenn man nun dies Felder C20, D20 „nach unten zieht“, sieht man, dass in Spalte D nur ganze Zahlen stehen, während Spalte E bestätigt, dass der Rest der Division immer Null ist.
Überraschender ist, dass die Folge der Quotienten - abgesehen vom fehlenden Anfang - wieder die Folge der Fibonacci-Zahlen ist.

8.3 Teilbakeiten

Jede 3. Fibonacci-Zahl ist durch 2 teilbar. Jede 4. Fibonacci-Zahl ist durch 3 teilbar. Jede 5. Fibonacci-Zahl ist durch 5 teilbar. Jede 6. Fibonacci-Zahl ist durch 8 teilbar. Jede 7. Fibonacci-Zahl ist durch 13 teilbar. Jede 8. Fibonacci-Zahl ist durch 21 teilbar. Jede 9. Fibonacci-Zahl ist durch 34 teilbar. usw., usw.

8.4 $2 \cdot f_n - f_{n+1}$

Verdoppelt man f_n und subtrahiert davon f_{n+1}, so erhält man f_{n-2}.
Dies zu beweisen ist etwas kniffelig, aber sollte für einige von euch möglich sein. Mal sehen, ob jemand in der nächsten Stunde den Beweis mitbringt.
a und b seien zwei aufeinander folgende Zahlen der Fibonacci-Folge. Die nächsten beiden sind dann a+b und a+2b
Wenn ich nun a als die Fibonacci-Zahl f_{n-2} bezeichne, gilt $f_n = a + b$ und $f_{n+1} = a + 2b$
Die Behauptung des Satzes lautet:

$$2 \cdot f_n - f_{n+1} = f_{n-2} \tag{18}$$

Einsetzen ergibt:

$$2 \cdot (a + b) - (a + 2b) = a \tag{19}$$
$$2a + 2b - a - 2b = a \tag{20}$$

8.5 $f_{n-1} \cdot f_{n+1}$

Das Quadrat einer Fibonacci-Zahl f_n unterscheidet sich um 1 vom Produkt aus der vorhergehenden Fibonacci-Zahl f_{n-1} und der nachfolgenden Fibonacci-Zahl f_{n+1}.

8.6 $f_{n+1}^2 - f_n^2$

Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} ist immer das Produkt der Fibonacci-Zahlen davor und dahinter.
die vier aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen sind:

$$f_n = a; f_{n+1} = b; f_{n+2} = a + b; f_{n+3} = a + 2b; \tag{21}$$

Die Behauptung lautet:

$$\begin{aligned} f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 &= f_n \cdot f_{n+3} && (22)\\ (a+b)^2 - b^2 &= a(a+2b) && (23)\\ a^2 + 2ab + b^2 - b^2 &= a^2 + 2ab && (24)\\ a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab && (25)\\ & && (26) \end{aligned}$$

8.7 $f_{n+2}^2 - f_n^2$

Die Differenz der Quadrate der Fibonacci-Zahl f_n und der übernächsten f_{n+2} ist immer eine Fibonacci-Zahl.

8.8 Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen

Die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen ist die um eins verminderte Fibonacci-Zahl f_{n+2}.
Der Beweis ist hier etwas schwieriger:
Ich nenne die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen S_n.
Dann gilt (überprüfen mit der TK):

$$\begin{aligned} &S_1 = 1 = f_3 - 1 && (27)\\ &S_2 = S_2 + f_2 = 1 + 1 = f_4 - 1 && (28)\\ &S_3 = 1 + 1 + 2 = 4 = f_5 - 1 && (29)\\ &S_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7 = f_6 - 1 && (30)\\ &S_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = f_7 - 1 && (31)\\ &\quad \cdots \qquad = \cdots && (32) \end{aligned}$$

Dies hätte ich auch etwas anders schreiben können:

$$\begin{aligned} &S_1 = 1 = f_3 - 1 && (33)\\ &S_2 = S_1 + f_2 = 1 + 1 = 2 = f_4 - 1 && (34)\\ &S_3 = S_2 + f_3 = 2 + 2 = 4 = f_5 - 1 && (35)\\ &S_4 = S_3 + f_4 = 4 + 3 = 7 = f_6 - 1 && (36)\\ &S_5 = S_4 + f_5 = 7 + 5 = 12 = f_7 - 1 && (37)\\ &\quad \cdots \qquad = \cdots && (38) \end{aligned}$$

Offensichtlich stimmt die Behauptung für die ersten Fibonacci-Zahlen.
Ich nehme nun einmal an, sie sei für irgendeinen Index k richtig, also:

$$S_k = f_{k+2} - 1 \tag{39}$$

$$\text{Dann ist} \tag{40}$$

$$S_{k+1} = S_k + f_{k+1} \tag{41}$$

$$= f_{k+2} - 1 + f_{k+1} \tag{42}$$

$$= (f_{k+2} + f_{k+1}) - 1 \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

Der Term in der Klammer ist aber gerade f_{k+3}.

8.8.1 vollständige Induktion

Wir haben zweierlei gezeigt:

- die Behauptung gilt für $n = 1$
- **wenn** die Behauptung für einen Index k stimmt, **dann** ist sie auch für den folgenden Index $k + 1$ richtig.

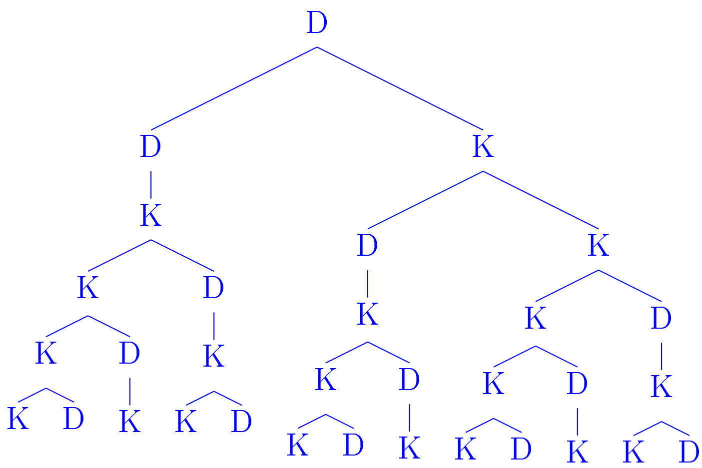
Sie ist also für $n = 1$ richtig;
wenn sie für $n = 1$ richtig ist, dann ist sie auch für $n + 1 = 2$ richtig
wenn sie für $n = 2$ richtig ist, dann ist sie auch für $n + 1 = 3$ richtig
wenn sie für $n = 3$ richtig ist, dann ist sie auch für $n + 1 = 4$ richtig
wenn sie für $n = 4$ richtig ist, dann ist sie auch für $n + 1 = 5$ richtig
usw. usw.
Damit ist Sie für alle natürliche Zahlen richtig.
Dies Beweisverfahren heißt ***vollständige Induktion***

9 Drohnen und Königinnen

Eine Drohne (männliche Biene) schlüpft aus einem unbefruchteten Ei. Aus befruchteten Eiern schlüpfen Bienenkönigin und Arbeiterinnen. Eine Königin hat also Mutter und Vater, eine Drohne hat dagegen nur eine Mutter, aber keinen Vater.

9.1

Zeichne mehrere Generationen des Stammbaums einer Drohne. Markiere jeweils, ob der Vorfahr Drohne oder Königin war. Bestimme wie viele Vorfahren es in jeder Generation gibt.



9.2

(schwer) versuche eine Rekursionsformel für die Anzahl der Vorfahren auszustellen!
Ist jetzt gar nicht mehr so schwer: Es handelt sich um die Fibonacci-Folge (außer dass sie mit 1;2 statt mit 1;1 anfängt.

10 einige Links

Suche einmal bei google nach folgenden Begriffe „Fibonacci“, „Fibonacci Zahlen“, „Fibonacci numbers“, „Fibonacci Botanik“, „Fibonacci Bienen“, „Fibonacci Brettspiel“ und „Fibonacci Goldener Schnitt“! Stelle jeweils fest, wie viele Links google findet

Hier sind einige Links (die ich mir gemerkt habe; sicher sind einige für euch von den Vorkenntnissen her zu schwer):

- http://www.fq.math.ca/
  [Englisch] The Fibonacci Quarterly; Publikation der Fibonacci Association; „die“Einstiegsadresse beim Suchen
- https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge
  [Deutsch]
- http://jumk.de/fibonaccizahlen/
  [Deutsch] Facharbeit einer Oberstufenschülerin aus Bayern (1998)
- http://www.math.ethz.ch/fibonacci/VirtuellerBesuch
  [Deutsch] Materialien zu einer Ausstellung über Leonardo von Pisa in der ETH Zürich 2003
- http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html
  [Englisch] sehr schön gemachte Seite der University of Surrey, Guildford, United Kingdom
- http://www.youtube.com/watch?v=wS7CZIJVxFY
  [Englisch]
- https://www.youtube.com/watch?v=4ToUaU4vPks
  [Englisch] Fibonacci Sequence Documentary, Golden Section Explained viele Beispiele aus Kunst und Natur
- https://www.youtube.com/watch?v=R8w4l3f3g58
  [Deutsch]
- https://www.youtube.com/watch?v=LDoKsw3SOdw
  [Deutsch] Vorlesung von Edmund Weitz, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
  schwer, aber das meiste sollte für euch verständlich sein wenn ihr das Video öfter stoppt und nachrechnet